الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
People's Democratic Republic of Algeria
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Ministry of Higher Education and Scientific Research
المدرسة العليا للاقتصاد وهـــران
Higher School of Economics of Oran

المدرسة العليا للاقتصاد
Ecole Supérieure d'Economie

Deuxième Année
19/09/2019

M :Naceri
Feuille n° 1

Fonctions à Deux Variables (TD)

Exercice 1 Représenter les ensembles de définitions des fonctions suivantes :

$$1)f(x,y)=\sqrt{1-xy}\quad ,2)f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}+\sqrt{4-x^2-y^2},\quad 3)f(x,y)=\sqrt{x+y}$$

$$4)f(x,y)=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2},\quad 5)f(x,y)=-\ln(x-y)+\frac{y}{x},\quad 6)f(x,y)=\frac{\sqrt{y-x}}{x}+\ln(x)$$

Exercice 2 Tracer les domaines suivants :

$$A=\{(x,y)\in R^2/y\geqslant 0, x^2+y^2<1\},\quad B=\{(x,y)\in R^2/x\geqslant 1, y>0, y+x-3\leqslant 0\}$$
$$C=\{(x,y)\in R^2/(x-1)^2+y^2\geqslant 1, y\geqslant 0\},\quad D=\{(x,y)\in R^2/0\leqslant x\leqslant 3, 0\leqslant y\leqslant 2\}$$

Exercice 3 Représenter les courbes de niveau pour :

$$1)f(x,y)=y-\cosh x,\quad k=0,1,-2.\quad 2)f(x,y)=3x+2y,\quad k=1,2,0;$$
$$3)f(x,y)=y^2,\quad k=0,1,4;\quad 4)f(x,y)=\frac{y}{x},\quad k=0,-1,1,2,3$$
$$5)f(x,y)=x^2-y,\quad k=0,1,2,3;\quad 4)f(x,y)=x^2-y^2,\quad k=0,1,2,3$$

Exercice 4 Calculer :

$$1)\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2},\quad 2)\lim_{(x,y)\to(x_0,0)}y^2\sin\frac{x}{y}, x_0\neq 0,\quad 3)\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}\frac{x+y}{x^2+y^2}.$$

$$4)\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}\frac{x+y}{x^2-xy+y^2},\quad 5)\lim_{(x,y)\to(0,a)}\frac{\sin xy}{x},\quad 6)\lim_{(x,y)(0,0)}\frac{x+y}{x^3+3y}.$$

Exercice 5 Chacune des fonctions suivantes est-elle prolongeable par continuité en $(0,0)$

$$1)f(x,y)=\frac{1-\cos(xy)}{y^2},\quad 2)f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{x},\quad 3)f(x,y)=\frac{x^2y}{x^2+y^2},$$
$$3)f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{|x|+|y|},\quad 4)f(x,y)=\frac{xy}{x^3+3y^2},\quad 5)f(x,y)=(x+y^2)\sin\frac{1}{xy}$$

Exercice 6 on définit la fonction

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & si\quad (x,y)\neq(0,0)\,;\\ 0, & si\quad (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

- Que vaut f sur les droites $y=0$ et $x=0$? et sur les autres droites linéaires ?

- Qu'en déduit-on sur la continuité de f ?

Exercice 7 Étudier la continuité des fonctions suivantes de $\mathbf{R^2}$ dans $\mathbf{R}$, définie par $f(0,0) = 0$ et pour $(x, y) \neq (0,0)$

$$f_1(x,y) = e^{x+y}, \quad f_2(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, \quad f_3(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, \quad f_4(x,y) = \sin\big(\frac{xy^2}{x^2+y^2}\big)$$

Exercice 8 Calculer les dérivées partielles du premier et second ordre pour les fonctions définies comme suit :

$$1) f(x,y) = \tan(3x-y) + 6^{y+x}, \quad 2) f(x,y) = x^3 - 4x^2y + 5y^2, \quad 3) f(x,y) = e^x ln(y) + \sin(y)\ln(x)$$

$$3) f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}, \quad 4) f(x,y) = xye^{\frac{y}{x}}, \quad 5) f(x,y) = Artg(x^2y) \quad 6) f(x,y) = \cos(x+y^2)$$

Exercice 9 Trouver les dérivées partielles de la fonction f par rapport aux variables x et y

$$1) f(u,v) = \ln(u^2+v^2), \quad u = e^{x+y^2}, \quad v = x^2+y, \quad 2) f(u,v) = u+v^2, \quad u = x^2+\sin y, \quad v = \ln(x+y)$$

$$3) f(u,v) = \sqrt{\frac{1+u}{1+v}}, \quad u = -\cos x, \quad v = \cos x, \quad 4) f(u,v) = e^{u-2v}, \quad u = \sin x, \quad v = x^3+y^2$$

Exercice 10 Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & si \quad (x,y) \neq (0,0)\,; \\ 0, \quad si & \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

- Étudier la continuité de f sur $\mathbf{R^2}$.
- Calculer les dérivées partielles de f'_x et f'_y de f.
- Quelles sont les valeurs de $f'_x(0,0)$ et $f'_y(0,0)$.
- f est-elle de classe C^1 sur $\mathbf{R^2}$

Exercice 11 Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} (x^2+y^2)\sin\big(\frac{1}{x^2+y^2}\big), & si \quad (x,y) \neq (0,0)\,; \\ 0, \quad si & \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

- Déterminer les fonctions f'_x et f'_y, sont elles continues au point $(0,0)$
- La fonction f est-elle differentiable en $(0,0)$

Exercice 12 Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}, & si \quad (x,y) \neq (0,0)\,; \\ 0, \quad si & \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

- Calculer $f'_x(0,0)$ et $f'_y(0,0)$.
- Montrer à l'aide de la definition que f n'est pas differentiable en $(0,0)$

- les fonctions f'_x et f'_y, sont elles continues au point $(0,0)$

Exercice 13

1. Vérifier l'énonce du théorème de Schwarz pour les fonctions C^2 suivantes

$$f(x,y) = xe^{xy}, \quad f(x,y) = \ln(x^2+y^2+1), \quad f(x,y) = (y+2)\tan x$$

2. Prouver que f définie de la manière suivantes n'est pas de classe C^2 en 0

$$\begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2}, & si \quad (x,y) \neq (0,0)\,; \\ 0, \quad si & \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Exercice 14 Écrire le développement limité à l'ordre 2 pour la fonction f au voisinage du point indiqué.

$$1) f(x,y) = xy + x^2 + 4y^2, \quad en \quad (1,2); \quad 2) f(x,y) = x\ln y + y \ln x, \quad en \quad (1,1);$$
$$3) f(x,y) = \ln(1+2x+3y) \quad en \quad (0,0).$$

Exercice 15 Étudier l'existence d'extremums pour les fonctions définies comme suit :

$$1) f(x,y) = 3xy - x^3 - y^3, \quad 2) f(x,y) = x^3 + 2xy + y^2 - 1, \quad 3) f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$$

Exercice 16 Soit la fonction

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 8$$

1. Trouver les points critiques de f.
2. Trouver les extrema locaux de f et étudier la nature.
3. la fonction f, possède-t-elle un maximum ou un minimum global. Si c'est le cas, trouver la valeur maximale ou minimale de f

Programme du module "Analyse" deuxième année

1. Fonctions numériques de deux variables
2. Intégrales doubles
3. Intégrales impropres
4. Séries numériques
5. Equations différentielles

"Si l'esprit d'un homme s'égare, faites-lui étudier les mathématiques car dans les démonstrations, pour peu qu'il s'écarte, il sera obligé de recommencer."

De "Joseph Joubert"

Fonctions à Deux Variables (TD)

Fonctions à Deux Variables (TD)