الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
People's Democratic Republic of Algeria
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Ministry of Higher Education and Scientific Research
المدرسة العليا للاقتصاد وهران
Higher School of Economics of Oran

Deuxième Année **M :Naceri**
19/09/2019 Feuille n° 1

Fonctions à Deux Variables (cours)

Exercice 1 Représenter les ensembles de définitions des fonctions suivantes :

$$1) f(x,y)=\sqrt{x+y} \quad ,2) f(x,y)=\sqrt{x^2-1}, \quad 3) f(x,y)=\ln\left(\frac{x-y}{3x+y}\right)$$

$$4) f(x,y)=e^{\frac{1}{xy-1}}, \quad 5) f(x,y)=\frac{x}{y^2+x^2}, \quad 6) f(x,y)=\sqrt{4-x^2-y^2}$$

Exercice 2 Tracer les domaines suivants :

$$A=\{(x,y)\in R^2/x\geqslant 0, y\geqslant 0\}, \quad B=\{(x,y)\in R^2/0\leqslant y\leqslant x, 0\leqslant x\leqslant 1\}$$

$$C=\{(x,y)\in R^2/1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}, \quad D=\{(x,y)\in R^2/O(0,0), A(2,0), B(2,1), C(0,1)\}$$

Exercice 3 Représenter les courbes de niveau pour :

$$1) f(x,y)=y-\cos x, \quad k=0,1,-2. \quad 2) f(x,y)=-3x-y+2, \quad k=1,2,0;$$

$$3) f(x,y)=x^2, \quad k=0,1,4; \quad 4) f(x,y)=xy, \quad k=1,2,3$$

$$5) f(x,y)=x^3-y, \quad k=0,1,2,3; \quad 4) f(x,y)=x^2+2x+y^2-4y+5, \quad k=0,1,4,9$$

Exercice 4 Calculer :

$$1) \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x+y}, \quad 2) \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|x|+|y|}{x^2+y^2}, \quad 3) \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^4y}{x^2-y^2}.$$

$$4) \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x}{x^2+y^2}, \quad 5) \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x\sin\frac{1}{x}+y}{x+y}, \quad 6) \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}.$$

Exercice 5 $f : R^2\backslash(0,0)\longrightarrow R$

$$f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$$

Démontrer que :

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)=\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)=0$$

et que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ n'existe pas.

Exercice 6 on définit la fonction

$$f(x,y) = \begin{cases} (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}, & si \quad xy \neq 0\,; \\ 0, \quad si & xy = 0. \end{cases}$$

Démontrer que les deux limites itérées :

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y), \quad et \quad \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)$$

n'existe pas, et que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existe et est égale à 0.

Exercice 7 soient f, g les fonctions définies dans R^2 par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x+y}{x^2+y^2}, & si \quad (x,y) \neq (0,0)\,; \\ 0, \quad si & (x,y) = (0,0). \end{cases} \quad , \quad g(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4}, & si \quad (x,y) \neq (0,0)\,; \\ 0, \quad si & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Montrer que f et g sont continues séparément par rapport a chacune des variables x et y, mais ne sont pas continues en $(0,0)$.

Exercice 8 Montrer que la fonction f définie sur R^2 par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y}{x^6+y^2}, & si \quad (x,y) \neq (0,0)\,; \\ 0, \quad si & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

est discontinue au point $(0,0)$, mais qu'elle admet des dérivées partielles premières en ce point.

Exercice 9 Calculer les dérivées partielles du premier et second ordre pour les fonctions définies comme suit :

$$1) f(x,y) = \cos(2x+4y) + \sin y + x, \quad 2) f(x,y) = x^4 + 4x^2y^3 + 3y^2, \quad 3) f(x,y) = xy + \frac{x}{y}$$

$$3) f(x,y) = \frac{x^3+y^2}{x^2-y^3}, \quad 4) f(x,y) = \ln(xy+3x+2y), \quad 5) f(x,y) = Arctg(x^3y^2) \quad 6) f(x,y) = ch(3x+y^2)$$

Exercice 10 Trouver les dérivées partielles de la fonction f par rapport aux variables x et y

$$1) f(u,v) = u^2+v^2, \quad u = xy, \quad v = x^2+3y, \quad 2) f(u,v) = 3u+v^2, \quad u = x^2+\cos y, \quad v = 2x+4y$$

$$3) f(u,v) = \frac{u}{1+v^2}, \quad u = \frac{x}{y}, \quad v = \frac{y}{x}, \quad 4) f(u,v) = uv^2, \quad u = 2x, \quad v = y^3$$

"En mathématiques, "évident" est le mot le plus dangereux."

De "Eric Temple Bell" **à suivre......**

Exercice 11 Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & si \quad (x,y) \neq (0,0)\,; \\ \\ 0, \quad si & \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

- Étudier la continuité de f sur $\mathbf{R^2}$.
- Calculer les dérivées partielles de f'_x et f'_y de f.
- Quelles sont les valeurs de $f'_x(0,0)$ et $f'_y(0,0)$.
- f est-elle de classe C^1 sur $\mathbf{R^2}$

Exercice 12 Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right), & si \quad (x,y) \neq (0,0)\,; \\ \\ 0, \quad si & \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

- Déterminer les fonctions f'_x et f'_y, sont elles continues au point $(0,0)$
- La fonction f est-elle differentiable en $(0,0)$

Exercice 13 Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & si \quad (x,y) \neq (0,0)\,; \\ \\ 0, \quad si & \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

- Calculer $f'_x(0,0)$ et $f'_y(0,0)$.
- Montrer à l'aide de la definition que f n'est pas differentiable en $(0,0)$
- les fonctions f'_x et f'_y, sont elles continues au point $(0,0)$

Exercice 14

1. Vérifier l'énonce du théorème de Schwarz pour les fonctions C^2 suivantes

$$f(x,y) = xe^{xy}, \quad f(x,y) = \ln(x^2+y^2+1), \quad f(x,y) = (y+2)\tan x$$

2. Prouver que f définie de la manière suivantes n'est pas de classe C^2 en 0

$$\begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2}, & si \quad (x,y) \neq (0,0)\,; \\ \\ 0, \quad si & \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Exercice 15 Écrire le développement limité à l'ordre 2 pour la fonction f au voisinage du point indiqué.

$$1) f(x,y) = xy + x^2 + 4y^2, \quad en \quad (1,2); \quad 2) f(x,y) = x\ln y + y\ln x, \quad en \quad (1,1);$$
$$3) f(x,y) = \ln(1+2x+3y) \quad en \quad (0,0).$$

Exercice 16 Étudier l'existence d'extremums pour les fonctions définies comme suit :

$$1) f(x,y) = 3xy - x^3 - y^3, \quad 2) f(x,y) = x^3 + 2xy + y^2 - 1, \quad 3) f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$$

Exercice 17 Soit la fonction

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 8$$

1. Trouver les points critiques de f.
2. Trouver les extrema locaux de f et étudier la nature.
3. la fonction f, possède-t-elle un maximum ou un minimum global. Si c'est le cas, trouver la valeur maximale ou minimale de f

Références

[1] J.Quinet *cours élémentaire de mathématiques supérieures,Tom 3 ,Calcul integral et séries* . Dunod-6 édition,Bordas,paris 1976.

[2] P.thuillier ;J-C.Belloc *Analyse,Tom I,II,fonction d'une variable réelle,fonction de plusieurs variables.* Masson,1982.

[3] Stewart-James *Calcul differentiel,Tom I,II.* Modulo 2013.

[4] Stewart-James *concepts et contextes,fonctions de plusieurs variables.* Volume 2,3 édition,de boeck

[5] Claude Lebreton,Philippe Testud *112 Exercices Corrigés ;Prépa économiques et commerciales.* Vuibert 1997.

[6] Louis Jérny,Pierre Mineau,Jean Claude Thienard *Analyse,Tom I,II,Précis de cours@250 exerices gradués et corrigés.* Vuibert 1997.

[7] Khelifa ZiZi *fonctions d'une variable reélle.* Imprimé en Algerie.2010

[8] Hugles Hallet,Gleason,Mc Callum *fonctions de plusieurs variables.* 2 édition,chenlière éducation 2006.

[9] Mathieu de Segonzac,Gilbert Monna *Bien débuter en mathématiques ;séries numériques(Exercices corrigs rappels de cours.* Cépadues 2012.

[10] Claude servien *Analyse Tom 3,Suites et séries de fonctions,intégrales.* ellipses.

[11] Olivier Rodot *Analyse mathématique une approche historique,cours exercices corrigés.* de boeck.

[12] Schaum's outline series *theory and problems of calculus 2ed.* Mc Graw-Hill Book company.1964.

"The essence of mathematics is not to make simple things complicated,but to make complicated things simple."
De " S. Gudder"

Fonctions à Deux Variables (cours)

Fonctions à Deux Variables (cours)